0078

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2017 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2017 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2017

උසස් ගණිතය I
உயர் கணிதம் I
Higher Mathematics I

11 S I

පැය තුනයි
மூன்று மணித்தியாலம்
Three hours

විභාග අංකය: | | | | | | | |

උපදෙස් :

* මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ;
  A කොටස (ප්‍රශ්න 1 - 10) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න 11 - 17).
* **A කොටස:**
  සියලු ම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.
* **B කොටස:**
  ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
* නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රය **B කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රයට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
* ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙන යාමට ඔබට අවසර ඇත.

පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි.

(11) උසස් ගණිතය I		
කොටස	ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	
	ප්‍රතිශතය	

I පත්‍රය	
II පත්‍රය	
එකතුව	
අවසාන ලකුණු	

අවසාන ලකුණු

ඉලක්කමෙන්	
අකුරෙන්	

සංකේත අංක

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක		
පරීක්ෂා කළේ :	1	
	2	
අධීක්ෂණය කළේ:		

A කොටස

1. සාධකවලට වෙන් කරන්න: $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$.

2. $\sin^2 x+\cos^2 y=1$ නම් xRy මගින් සියලු ධන තාත්ත්වික සංඛ්‍යා කුලකය වූ $\mathbb{R}^+$ මත R සම්බන්ධයක් අර්ථ දැක්වේ. R යනු $\mathbb{R}^+$ මත තුල්‍යතා සම්බන්ධයක් බව පෙන්වන්න. π හි තුල්‍යතා පන්තිය සොයන්න.

3. $a \neq 0$ වූ $a, b \in \mathbb{R}^{+}$ යැයි ද $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x) = ax + b$ යැයි ද ගනිමු. f යන්න එකට-එක හා මතට බව පෙන්වන්න. $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $g(x) = 2x + 1$ යැයි ගනිමු. $f \circ g = g \circ f$ නම් $a = b + 1$ බව පෙන්වන්න.

4. $\begin{vmatrix} 1 & \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \\ 1 & \cos^4\alpha & \sin^4\alpha \\ 1 & \sec^2\alpha & \tan^2\alpha \end{vmatrix} = 2\sin^4\alpha\cos^2\alpha$ බව පෙන්වන්න.

5. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ඉලිප්සයට (x_1, y_1) ලක්ෂ්‍යයෙහි දී වූ ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$ බව පෙන්වන්න.

$x^2+y^2=a^2$ සහායක වෘත්තයට (x_1, y_2) ලක්ෂ්‍යයෙහි දී වූ ස්පර්ශකයේ සමීකරණය අපෝහනය කරන්න.

$x_1 \neq 0$ හා $y_1 \neq 0$ බව දී ඇති විට, මෙම ස්පර්ශක දෙක ඉලිප්සයේ ප්‍රධාන අක්ෂය මත ලක්ෂ්‍යයක දී හමුවන බව පෙන්වන්න.

6. $a>0$ හා $b>0$ යැයි ද $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ යනු

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x+a|}{x+a}, & x>-a \text{ නම්} \\ 2x+1, & -a\leq x\leq b \text{ නම්} \\ 2+\ln(x+1-b), & x>b \text{ නම්} \end{cases}$$

මගින් අර්ථ දැක්වෙන ශ්‍රිතය යැයි ද ගනිමු. $\mathbb{R}$ මත f සන්තතික බව දී ඇත. a හා b හි අගයන් සොයන්න.

7. $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ යනු $x\in\mathbb{R}$ සඳහා $f(x)=x|x|$ මගින් අර්ථ දැක්වෙන ශ්‍රිතය යැයි ගනිමු. $x=0$ දී $f(x)$ අවකලය බව පෙන්වා සියලු $x\in\mathbb{R}$ සඳහා $f'(x)$ ලියා දක්වන්න.
$x=0$ දී $f'(x)$ අවකලය **නොවන** බව පෙන්වන්න.

8. $x=1$ විට $y=2$ අවශ්‍යතාවට යටත්ව $\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=\sqrt{x^3+3}$ අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

9. $a \in \mathbb{R}$ යැයි ද f යනු $[0, 2a]$ මත අර්ථ දැක්වෙන $x \in [0, a]$ සඳහා $f(x + a) = f(x)$ වන පරිදි වූ තාත්ත්වික-අගයැති සන්තතික ශ්‍රිතයක් යැයි ද ගනිමු. $\int_0^{2a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ බව පෙන්වන්න.

10. ධ්‍රැවක සමීකරණ $r = 2\cos\theta$ හා $r = 2\sin\theta$ මගින් දෙනු ලබන වක්‍රවල දළ සටහන් එක ම රූපයක ඇඳ මෙම වක්‍ර දෙක මගින් ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය සොයන්න.

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2017 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2017 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2017

උසස් ගණිතය I
உயர் கணிதம் I
Higher Mathematics I

11 S I

B කොටස

✻ ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (*a*) A, B, C හා D යනු S සර්වත්‍ර කුලකයක උපකුලක යැයි ගනිමු. ඔබ භාවිත කරන කුලක වීජයේ නියමයන් පැහැදිලි ව ප්‍රකාශ කරමින් පහත එක එකක් සාධනය කරන්න:

(i) $(A \cap B \cap C \cap D)' = (A' \cup B' \cup C' \cup D')$

(ii) $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$; මෙහි $A - B$ යන්න $A - B = A \cap B'$ මගින් අර්ථ දැක්වේ.

(*b*) ශිෂ්‍යයන් 600ක් අතර ක්‍රිකට්, වොලිබෝල් හා පාපන්දු අතුරෙන් ඔවුන් කැමති ක්‍රීඩා නිර්ණය කිරීම සඳහා සංගණනයක් පවත්වන ලදී. සංගණනයෙන් පහත දැක්වෙන දත්ත රැස්කර ගෙන ඇත:

ක්‍රිකට්වලට 206ක් කැමති ය, වොලිබෝල්වලට 141 කැමති ය, පාපන්දුවලට 184ක් කැමති ය. තව ද ක්‍රිකට් හා වොලිබෝල්වලට 42ක් ද ක්‍රිකට් හා පාපන්දුවලට 65ක් ද වොලිබෝල් හා පාපන්දුවලට 57ක් ද කැමති අතර 19ක් ක්‍රීඩා තුනට ම කැමති ය.

සංගණනය කරන ලද ක්‍රීඩා අතුරෙන්,

(i) වැඩි තරමින් එක් ක්‍රීඩාවකට,

(ii) හරියටම ක්‍රීඩා දෙකකට,

(iii) පාපන්දුවලට පමණක්,

කැමති ශිෂ්‍යයන් ගණන සොයන්න.

කිසිම ක්‍රීඩාවකට කැමති නැති ශිෂ්‍යයන් ගණන ද සොයන්න.

12. (*a*) a, b හා c යන ධන තාත්ත්වික සංඛ්‍යා තුනක් සඳහා සමාන්තර මධ්‍යන්‍ය-ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍ය අසමානතාව $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ මගින් දෙනු ලැබේ.

(i) මෙහි සමානතාව වලංගු වන්නේ කුමන විට ද?

(ii) $a^3 + b^3 = 3ab$ වන පරිදි a හා b හි යුගල සියල්ල සොයන්න.

(iii) $(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 9a^2b^2c^2$ බව පෙන්වන්න.

(iv) $a > b$ වන විට, $a + \dfrac{1}{b(a-b)}$ හි අවම අගය කුමක් ද?

(*b*) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ පරිණාමනය, xy-තලයේ ලක්ෂ්‍ය $x'y'$-තලයට අනුරූපණය කරයි.

$ad - bc \neq 0$ නම්, මෙම පරිණාමනය මගින් xy-තලයේ සමාන්තර රේඛා, $x'y'$-තලයේ සමාන්තර රේඛා මතට අනුරූපණය කෙරෙන බව පෙන්වන්න.

[අවසානී පිටුව බලන්න.

13. ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා **ද මුවාවර් ප්‍රමේයය** ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

$\omega = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$ යැයි ගනිමු. $k = 0, 1, 2, \ldots$ සඳහා ω^k යන්න $z^7 = 1$ සමීකරණයෙහි මූලයක් බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $z^7 = 1$ සමීකරණයේ මූල හත ලියා දක්වන්න.

තව ද $k = 0, 1, 2, \ldots, 6$ සඳහා $\omega^k = \cos\frac{2k\pi}{7} + i\sin\frac{2k\pi}{7}$ බව පෙන්වා $k = 1, 2, 3$ සඳහා $\omega^k + \omega^{7-k} = 2\cos\frac{2k\pi}{7}$ බව අපෝහනය කරන්න.

$1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^6 = 0$ බව තවදුරටත් පෙන්වා, $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$ බව අපෝහනය කරන්න.

14. (*a*) C_1 හා C_2 යනු පිළිවෙළින් $y = 2x^2$ හා $y = x^2 + 1$ මගින් දෙනු ලබන වක්‍ර යැයි ගනිමු. ඒවායේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක දක්වමින් C_1 හා C_2 හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් එක ම රූපයක අඳින්න.

C_1 හා C_2 වක්‍ර දෙකෙන් සපර්යන්ත වන D පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය සොයන්න.

D පෙදෙස x-අක්ෂය වටා සෘජු කෝණ හතරකින් භ්‍රමණය කිරීමෙන් ජනනය වන ඝනයෙහි පරිමාව ද සොයන්න.

(*b*) වක්‍ර කුලයක් $\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3y - 5}{2x + 7y - 9}$ අවකල සමීකරණය තෘප්ත කරයි. $x = X + a$ හා $y = Y + b$ ආදේශ කිරීමෙන්, දී ඇති අවකල සමීකරණය $\frac{dY}{dX} = \frac{X + 3Y}{2X + 7Y}$ ට පරිණාමනය වන බව පෙන්වන්න; මෙහි a හා b යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

$Y = vX$ ආදේශ කිරීමෙන් මෙම අවකල සමීකරණය විසඳා, ඉහතින් දෙන ලද වක්‍ර කුලයෙහි කාටීසීය නිරූපණය ලබා ගන්න.

15. (*a*) $I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ නම්, $n \geq 2$ සඳහා $I_n = x^{n-1}\sqrt{(a^2 + x^2)} - (n-1)a^2 I_{n-2}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\int_0^2 \frac{x^5 dx}{\sqrt{5 + x^2}} = \frac{168}{5} - \frac{40\sqrt{5}}{3}$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) $y(x) = \ln(\sec x)$ හි n වන ව්‍යුත්පන්නය $y_n(x)$ මගින් දක්වන්නේ යැයි ගනිමු.

$y_3 = 2y_2 y_1$ හා $y_5 = 2y_4 y_1 + 6y_3 y_2$ බව පෙන්වන්න.

$n = 1, 2, 3, 4$ හා 5 සඳහා $y_n(0)$ හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, x හි x^6 හා ඊට වඩා විශාල බල නොසලකා හරින්නේ නම්, $y(x)$ සඳහා මැක්ලෝරින් ශ්‍රේණි ප්‍රසාරණය ලියා දක්වන්න.

$\ln 2 = \frac{\pi^2}{16}\left(1 + \frac{\pi^2}{96}\right)$ ආසන්න සම්බන්ධතාව අපෝහනය කරන්න.

[නවවැනි පිටුව බලන්න.

16. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ බහුවලයේ සහ $y=mx+c$ සරල රේඛාවේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යවල x-ඛණ්ඩාංක $(a^2m^2-b^2)x^2+2a^2mcx+a^2(b^2+c^2)=0$ සමීකරණය සපුරාලන බව පෙන්වන්න; මෙහි a, b, m සහ c නිශ්ශුන්‍ය තාත්ත්වික නියත වේ.

$y=mx+c$ රේඛාව, බහුවලයට ස්පර්ශකයක් වේ නම්, $a^2m^2=b^2+c^2$ බව අපෝහනය කරන්න.

$(1,4)$ ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන, $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1$ බහුවලයේ ස්පර්ශක දෙකෙහි සමීකරණ සොයන්න.

මෙම ස්පර්ශක දෙක බහුවලය ස්පර්ශ කරන ලක්ෂ්‍ය දෙකෙහි ඛණ්ඩාංකත් සොයන්න.

17. (*a*) $x\in\mathbb{R}$ සඳහා $f(x)=4\sin^2x+4\cos x-1$ යැයි ගනිමු.

(i) $a-(b\cos x+c)^2$ ආකාරයෙන් $f(x)$ ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි a, b හා c යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

ඒ නයින්, $f(x)$ හි උපරිම අගය හා අවම අගය සොයා, ඒවා ලබා ගන්නා ලක්ෂ්‍යවල x - ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

(ii) $f(x)=0$ සමීකරණය විසඳන්න.

(iii) $0\le x\le\pi$ සඳහා $y=f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(*b*) පහත වගුවෙන් දෙනු ලබන e^{x^2} හි අගයන් ඇතිව සිම්සන් නීතිය භාවිතයෙන් $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ සඳහා ආසන්න අගයක් සොයන්න.

x	0	0.25	0.50	0.75	1.0
e^{x^2}	1	1.064	1.284	1.755	2.718

$\int_0^1\left(2x+3e^{x^2}\right)dx$ සඳහා ආසන්න අගයක් අපෝහනය කරන්න.

* * *

Department of Examinations, Sri Lanka

Department of Examinations, Sri Lanka

AL/2017/11/S-II

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2017 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2017 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2017

උසස් ගණිතය II உயர் கணிதம் II Higher Mathematics II	11 S II	පැය තුනයි மூன்று மணித்தியாலம் Three hours

විභාග අංකය							

උපදෙස් :

* මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ;
  A කොටස (ප්‍රශ්න 1 - 10) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න 11 - 17).
* **A කොටස**
  සියලු ම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.
* **B කොටස**
  ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
* නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රය **B කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රයට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
* ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙන යාමට ඔබට අවසර ඇත.
* සංඛ්‍යාන වගු සපයනු ලැබේ.
* g මගින් ගුරුත්වජ ත්වරණය දැක්වෙයි.

පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි.

(11) උසස් ගණිතය II		
කොටස	ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	
	ප්‍රතිශතය	

I පත්‍රය	
II පත්‍රය	
එකතුව	
අවසාන ලකුණු	

අවසාන ලකුණු

ඉලක්කමෙන්	
අකුරෙන්	

සංකේත අංක

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක	
පරීක්ෂා කළේ : 1	
2	
අධීක්ෂණය කළේ:	

[දෙවැනි පිටුව බලන්න.

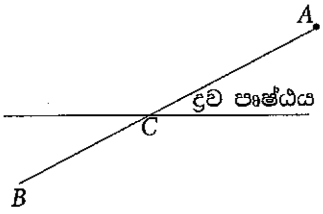
A කොටස

1. O මූලයක් අනුබද්ධයෙන් A, B හා C ලක්ෂ්‍ය තුනක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\mathbf{i}, 2\mathbf{j}$ හා $2\mathbf{k}$ වේ. $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ දෛශික ගුණිතය සැලකීමෙන්
   (i) ABC ත්‍රිකෝණයෙහි වර්ගඵලය වර්ග ඒකක $\sqrt{6}$ ක් බව හා
   (ii) ABC හි තලයට ලම්බ ඒකක දෛශිකයක් $\dfrac{2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{6}}$ බව

   පෙන්වන්න.

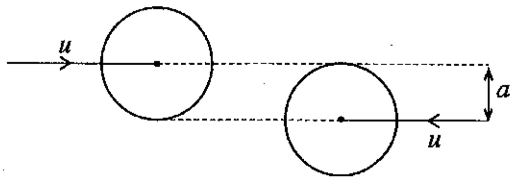
2. විශාලත්වය $15\,\text{N}$ වූ $\mathbf{F}$ බලයක් $a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ පිහිටුම් දෛශිකය සහිත ලක්ෂ්‍යයෙහි දී $2\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ දෛශිකයේ දිශාවට ක්‍රියා කරයි. O මූලය වටා $\mathbf{F}$ හි ඝූර්ණ දෛශිකය $10\mathbf{i}+20\mathbf{j}\,\text{N m}$ වේ නම් මීටරවලින් මනින ලද a හා b නියතවල අගයන් සොයන්න.

3. A කෙළවරින් සුමට ලෙස අසව් කරන ලද දිග $2a$ හා ඝනත්වය ρ වූ ඒකාකාර AB දණ්ඩක්, දිග $2b$ වූ BC කොටස ඝනත්වය σ වූ සමජාතීය ද්‍රවයක ගිල්වන ලදුව රූපයේ දැක්වෙන පරිදි ආනත පිහිටීමක සමතුලිතව ඇත. $\dfrac{\rho}{\sigma} = \dfrac{2ab - b^2}{a^2 + 2ab - b^2}$ බව පෙන්වන්න.



4. O අචල මූලයක් අනුබද්ධයෙන්, ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක, t කාලයේ දී පිහිටුම් දෛශිකය $\mathbf{r}$ වේ. P මත ක්‍රියා කරන $\mathbf{F}$ බලය O වෙතට යොමු වී තිබෙන බව දී ඇත. $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ මගින් අර්ථ දැක්වෙන එහි කෝණික ගම්‍යතා දෛශිකය $\mathbf{h}$ නියතව පවතින බව පෙන්වන්න; මෙහි $\mathbf{v}$ යනු ප්‍රවේගය වේ.
අංශුවේ පෙත $\mathbf{r} \cdot \mathbf{h}$ = නියතයක් ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි සමීකරණය සහිත තලයක් මත පිහිටන බවත් පෙන්වන්න.

5. එක එකක අරය a වූ සමාන සුමට ගෝල දෙකක් සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත, එකිනෙකට a දුරින් පිහිටි සමාන්තර රේඛා දෙකක් දිගේ එක ම u වේගයෙන්, එකිනෙක දෙසට, ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශාවලට චලනය වේ. ඒවා අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{1}{3}$ කි. ඒවායේ ගැටුමෙන් පසු, එක් එක් අංශුව එහි මුල් චලිත දිශාවට ලම්බව $\frac{u}{\sqrt{3}}$ වේගයෙන් චලනය වන බව පෙන්වන්න.



6. ස්කන්ධය m හා දිග $2a$ වූ ඒකාකාර AB දණ්ඩක A කෙළවර අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස අසව් කර ඇත. දණ්ඩ සමතුලිතව එල්ලෙන විට එයට ω කෝණික වේගයක් දෙනු ලැබේ. $\omega^2 \geq \frac{3g}{a}$ වේ නම්, B කෙළවර පූර්ණ වෘත්තයක් ගෙවා යන බව පෙන්වන්න.

7. "සාධාරණ කාසි හතරක් උඩ දැමූ විට ලැබෙන හිසවල් ගණන" X සසම්භාවී විචල්‍යය ලෙස ගනිමු. X හි අපේක්ෂාව සොයා X හි විචලතාව 1 බව පෙන්වන්න.

8. යන්ත්‍රයකින් නිෂ්පාදිත අයිතමවලින් 10% ක් දෝෂ සහිත වේ. නිෂ්පාදනයෙන් සසම්භාවීව තෝරාගත් අයිතම 5 කින් වැඩිතම වශයෙන් අයිතම 2ක් දෝෂ සහිත වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

9. X සසම්භාවී විචල්‍යයක $f(x)$ සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය

$$f(x) = \begin{cases} a(2-x) & , \ 1 \le x \le 2 \text{ නම්,} \\ 0 & , \ \text{අනෙක් විට,} \end{cases}$$

මගින් දෙනු ලැබේ. (i) $a = 2$, (ii) මධ්‍යන්‍යය, $\mu = \frac{4}{3}$ හා (iii) $P(1 \le X \le 1.5) = 0.75$ බව පෙන්වන්න.

10. X සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යයක $f(x)$ සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} & , \ x \ge 0 \text{ නම්,} \\ 0 & , \ \text{අනෙක් විට,} \end{cases}$$

මගින් දෙනු ලැබේ.

$P(X \le x) = 1 - e^{-\frac{x}{10}}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $P(5 < X \le 10)$ සොයන්න.

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2017 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2017 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2017

උසස් ගණිතය II
உயர் கணிதம் II
Higher Mathematics II

11 S II

B කොටස

* ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ හා $\mathbf{F}_3$ බල තුනක් පහත නියම කර ඇති පරිදි පිළිවෙළින් $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ හා $\mathbf{r}_3$ පිහිටුම් දෛශික සහිත ලක්ෂ්‍යවල දී ක්‍රියා කරයි:

ක්‍රියා ලක්ෂ්‍යය	බලය
$\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$	$\mathbf{F}_1 = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$
$\mathbf{r}_2 = -3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$	$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
$\mathbf{r}_3 = 3\mathbf{i} - \mathbf{k}$	$\mathbf{F}_3 = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

O මූලයෙහි දී මෙම බල පද්ධතිය ඌනනය කළ විට, $\mathbf{R}$ තනි බලයකට හා ඝූර්ණ දෛශිකය $\mathbf{G} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$ වූ යුග්මයකට තුල්‍ය වන බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, පද්ධතිය තනි සම්ප්‍රයුක්ත බලයකට ඌනනය වන බව පෙන්වන්න.

$\mathbf{R}$ හි විශාලත්වය සොයා, සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ ක්‍රියා රේඛාවේ දෛශික සමීකරණයක් $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{R}$ ආකාරයෙන් ලබා ගන්න; මෙහි λ පරාමිතියක් වන අතර $\mathbf{a}$ නිර්ණය කළ යුතු ලක්ෂ්‍යයක පිහිටුම් දෛශිකය වේ.

12. කේන්ද්‍රය O හා අරය a වූ අර්ධ වෘත්තාකාර ආස්තරයක් එහි තලය සිරස් ව හා විෂ්කම්භය ද්‍රවයේ නිදහස් පෘෂ්ඨය මත ඇතිව සමජාතීය ද්‍රවයක ගිල්වනු ලැබේ. අනුකලනය භාවිතයෙන්, ආස්තරය මත ද්‍රව තෙරපුම සොයා ආස්තරයෙහි පීඩන කේන්ද්‍රය O සිට $\frac{3\pi}{16}a$ ගැඹුරකින් ඇති බව පෙන්වන්න.

කේන්ද්‍රය O හා අරය a වූ අර්ධ වෘත්තාකාර හැඩයකින් යුතු දොරක් ටැංකියක සිරස් පැත්තක් මත සාදනු ලැබේ. දොර, AB තිරස් විෂ්කම්භය දිගේ සුමට ලෙස අසව් කරනු ලැබ, දොර ABට පහළින් පිහිටයි. ඝනත්වය ρ වන සමජාතීය ද්‍රවයකින් ටැංකිය AB මට්ටමට පුරවනු ලැබේ. ද්‍රවය ටැංකිය තුළම රැඳෙන පරිදි දොර වසා තැබීමට එයට යෙදිය යුතු අඩුතම බලය සොයන්න.

13. ස්කන්ධය m වූ අංශුවක්, සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත u ආරම්භක වේගයකින් තිරස් ව ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. එහි චලිතයට ප්‍රතිරෝධය $\lambda m v^{\frac{3}{2}}$ වේ; මෙහි λ ධන නියතයක් වන අතර v යනු t කාලයේ දී අංශුවේ වේගය වේ. $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\lambda v^{\frac{3}{2}}$ බව පෙන්වා, **ඒ නයින්**, $v = \frac{4u}{(2 + \lambda\sqrt{u}\, t)^2}$ සම්බන්ධය ලබා ගන්න.

වේගය u සිට $\frac{u}{4}$ තෙක් අඩුවීම සඳහා අංශුව ගනු ලබන කාලය $\frac{2}{\lambda\sqrt{u}}$ බව තවදුරටත් පෙන්වා, එම කාල ප්‍රාන්තරයේ දී අංශුව ගමන් කරන දුර සොයන්න.

14. එක ම අරය හා එක ම ස්කන්ධය සහිත පිළිවෙළින් කේන්ද්‍ර A හා B සහිත P හා Q කුඩා සුමට ගෝල දෙකක් සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත එකිනෙක දෙසට චලනය වේ. ගැටීමට මොහොතකට පෙර, P හි ප්‍රවේගය වූ $\mathbf{u}$, $\overrightarrow{AB}$ සමග θ සුළු කෝණයක් සාදන අතර Q හි ප්‍රවේගය වූ $\mathbf{v}$, $\overrightarrow{BA}$ දිශාවට වේ. ගෝල දෙක අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e වේ. ගැටුමට මොහොතකට පසු AB කේන්ද්‍ර රේඛාව දිගේ හා එයට ලම්බ P හි ප්‍රවේගයෙහි සංරචක සොයන්න.

$u < \left(\dfrac{1-e}{1+e}\right)v$ බව දී ඇති විට, Q ගෝලය $(1-e)\dfrac{v}{2} - \dfrac{(1+e)}{2}u\cos\theta$ වේගයෙන් පෙර දිශාවටම චලනය වන බව පෙන්වන්න; මෙහි $v = |\mathbf{v}|$ හා $u = |\mathbf{u}|$ වේ.

තව ද $u\cos\theta << v$ නම්, Q හි ඉතිරි වන චාලක ශක්තිය එහි මුල් අගයෙන් $\dfrac{1}{4}(1-e)^2$ භාගයක් බව පෙන්වන්න.

15. ස්කන්ධය M හා අරය r වූ ඒකාකාර ඝන ගෝලයක් තිරසට ආනතිය α වූ අචල රළු තලයක් මත නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. ගෝලය හා තලය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය μ වේ.

(i) $\mu > \dfrac{2}{7}\tan\alpha$ නම්, ගෝලය තලයේ පහළට පෙරළී යන අතර එහි කේන්ද්‍රයට $a = \dfrac{5}{7}g\sin\alpha$ මගින් දෙනු ලබන නියත a ත්වරණයක් ඇති බව පෙන්වන්න.

(ii) $\mu < \dfrac{2}{7}\tan\alpha$ නම්, ගෝලය තලයේ පහළට ලිස්සා යන අතර එහි කේන්ද්‍රයේ ත්වරණය a ට වඩා වැඩි බව පෙන්වන්න.

(iii) $\mu = \dfrac{2}{7}\tan\alpha$ නම්, හා ආරම්භයේ දී ගෝලය භ්‍රමණය නොකර එහි කේන්ද්‍රයට, තලයේ පහළට උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් දිගේ u ප්‍රවේගයක් දුන්නේ නම්, එම ප්‍රවේගය නොවෙනස්ව පවතින බව පෙන්වන්න.

[ස්කන්ධය M හා අරය r වූ ඒකාකාර ඝන ගෝලයක විෂ්කම්භයක් වටා අවස්ථිති ඝූර්ණය $\dfrac{2}{5}Mr^2$ බව උපකල්පනය කළ හැක.]

16. (a) X විවික්ත සසම්භාවී විචල්‍යයක් සඳහා මධ්‍යන්‍යය, $E(X) = \mu$ අර්ථ දක්වා X හි විචලතාව සඳහා $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2$ සූත්‍රය ලබා ගන්න.

(b) X විවික්ත සසම්භාවී විචල්‍යයක සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය පහත දැක්වෙන පරිදි වේ.

x	1	2	4	5
$P(X=x)$	p	q	q	p

$p = \dfrac{1}{12}$ බව දී ඇති විට q හි අගය සොයන්න.

$E(X) = 3$ බව පෙන්වා $\mathrm{Var}(X)$ සොයන්න.

Y සසම්භාවී විචල්‍යය $Y = X_1 + X_2$ මගින් අර්ථ දැක්වේ. මෙහි X_1 හා X_2 යනු X හි ස්වායත්ත නිරීක්ෂණ දෙකකි. $P(Y=6) = \dfrac{13}{36}$ බව පෙන්වා, Y හි සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය ලබා ගන්න.

$E(Y)$ හා $\mathrm{Var}(Y)$ සොයන්න.

$E(Y) = 2E(X)$ බව ද $\mathrm{Var}(Y) = 2\mathrm{Var}(X)$ බව ද **සත්‍යාපනය** කරන්න.

17. (a) X සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යයක $f(x)$ සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය,

$$f(x) = \begin{cases} kx(1-x) & , \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ නම්,} \\ 0 & , \quad \text{අනෙක් විට,} \end{cases}$$

මගින් දෙනු ලැබේ.

(i) $k = 6$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $P\left(X > \frac{1}{2}\right)$ සොයන්න.

(iii) $E(X)$ හා $\text{Var}(X)$ සොයන්න.

(b) තේ මලුවල බර, 200 g මධ්‍යන්‍යය සහිතව ප්‍රමත ලෙස ව්‍යාප්ත වී ඇත. සියලු ම මලුවලින් හරියටම 60% ක බර 190 g හා 210 g අතර බව දී ඇත.

(i) තේ මලුවල බරෙහි සම්මත අපගමනය සොයන්න.

(ii) සසම්භාවීව තෝරා ගනු ලැබූ තේ මල්ලක බර 180 g හා 200 g අතර තිබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(iii) තේ මලු හතරක් සසම්භාවීව තෝරා ගනු ලැබේ. මෙම මලුවලින් අඩුතරමින් එකකවත් බර 210 g ට වැඩි වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

***